

# LIMITE ET CONTINUITÉ

## I) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

### 1) Rappelles :

Soient P et Q deux fonction polynôme et  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^*$  alors :

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$  si  $Q(x_0) \neq 0$

3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$     4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$

5)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$  si  $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$

5)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$  si  $x_0 \geq 0$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$     7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$     9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

### Limite de la somme

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers  $a+$  ;  $a-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

### Limites des produits

$\lim f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

### Limites des inverses

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

### Limites des quotients

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\ell$	0	$\pm \infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$	?	?

### 2) Exercices : RAPPELLES

Exercice1 : Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$

6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Solutions : 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$  ?

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left( \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1}} = \frac{1}{2}$$

6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$  On pose  $x - \frac{\pi}{4} = h$

donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or :  $\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

### Limites à droite et à gauche

#### Exercice2 : (Limites à droite et à gauche)

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en  $x_0 = -1$

**Solution :** Déterminons  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

Si :  $-1 < x < 1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si :  $x < -1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

**Exercice3 :** Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Solution :**

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$

Et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ? et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$  ? et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17$  et

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1$  et

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$

4)  $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  donc :  $D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$



**Exercice7 :** Considérons la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

**Solution :**  $x \in \mathbb{R}^* \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :

$$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

### 3) continuité à droite et à gauche

**Exemple :** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2 + x; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = f(0)$$

On dit que  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 0$

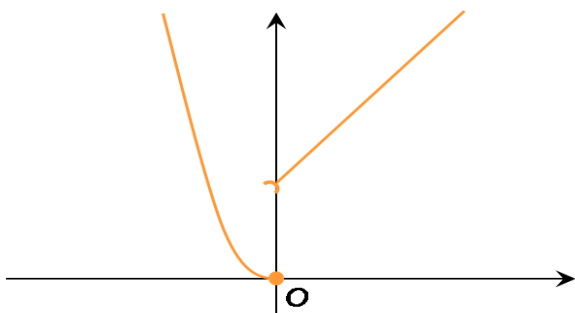
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x = 2 \neq f(0)$$

On dit que  $f$  n'est pas continue à droite de 0

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.

Conséquence :  $f$  ne peut être continue en 2



Graphiquement : La courbe de  $f$  ne peut être tracée sur un intervalle contenant 0, « sans lever le crayon ».

**Définition :1)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à droite de  $a$  si elle admet une limite finie à droite en  $a$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) :$$

**2)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r; a]$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à gauche de  $a$  si elle admet une limite finie à gauche en  $a$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

**Exemple :** Soit  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche de  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$$

donc  $f$  est continue à gauche de  $x_0 = 0$

**Théorème :** Une fonction est continue en un point  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de  $a$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$  ssi

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

**Exemple1 :** Considérons la fonction  $f$  définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

$$\text{Solution : on a : } f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = \frac{5}{7 - 3 \times 2} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5 = f(2)$$

Donc  $f$  est continue à droite de  $f$  en  $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{7-3x} = \frac{5}{1} = 5 = f(2)$$

Donc  $f$  est continue à gauche en  $x_0 = 2$

Donc  $f$  est continue en  $x_0 = 2$

**Exemple2:** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$  si  $x \neq 1$

$$\text{Et : } f(1) = 2$$

Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 1$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 = f(1)$$

donc  $f$  est continue à droite de  $x_0 = 1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(x + 1) = -2 \neq f(1)$$

donc  $f$  n'est pas continue à gauche de  $x_0 = 1$

donc  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = 1$

On dit que  $f$  est discontinue en  $x_0 = 1$

#### 4) Prolongement par continuité

**Activité :** Soit la fonction  $h$  définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2- Déterminer la limite  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ,  $f$  est-elle

continue en  $x_0 = -1$  ?

3- Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer  $D_f$

b) Etudier la continuité de la fonction

$f$  en  $x_0 = -1$  La fonction  $f$  s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de  $f$  en  $-1$

4- Peut-on prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Solution :** 1)

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} = 3$$

$-1 \notin D_f$  donc  $f$  n'est pas continue en  $x_0 = -1$

$$3) a) \begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \text{ donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 = f(-1)$$

donc  $f$  est continue en  $x_0 = -1$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 + 1 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^- \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger  $f$  par continuité en  $a = -2$

**Théorème et définition :** Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$  ;  $a$  un réel tel que  $a \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  (finie)

La fonction  $f$  définie par :  $\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$

Est une fonction continue en  $a$  et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $a$

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \text{ Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc La fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } \dots x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 0$

### III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

#### 1) Continuité sur un intervalle

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition est  $D_f$ , soit  $]a, b[$  un intervalle inclus dans  $D_f$

1) On dit que  $f$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est continue en tout point de  $]a, b[$

2) On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et à droite de  $a$

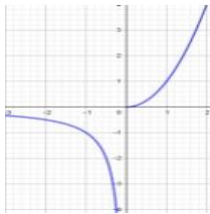
3) On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  si elle est continue sur  $]a, b[$ , à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

**Remarque :**

- 1) Si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$  elle est continue sur  $[a, c]$
- 2) En général si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et sur un intervalle  $J$  et si  $I \cap J \neq \emptyset$  alors  $f$  est continue sur  $I \cup J$ .
- 3)  $f$  peut-être continue sur  $[a, b[$  et sur  $[b, c]$  sans qu'elle soit continue sur  $[a, c]$

Dans le graphique ci-dessous  $f$  est continue sur

$$[-3, 0[ \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{x}; \text{ si } \dots x < 0 \\ f(x) = x^2; \text{ si } \dots x \geq 0 \end{cases}$$



continue sur  $[0, 2]$  mais pas continue sur  $[-3, 0]$  car elle n'est pas continue en 0

## 2) Opérations sur les fonctions continues

**Propriétés :** 1) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors :

a)  $f + g$     b)  $f \times g$     c)  $|f|$

Sont des fonctions continues en  $a$

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  et  $g(a) \neq 0$  alors

a)  $\frac{1}{g}$     b)  $\frac{f}{g}$  sont des fonctions continues en  $a$ .

3) Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$

**Remarque :** La propriété précédente reste vraie soit à droite de  $a$ , à gauche de  $a$  ou sur un intervalle  $I$  (En tenant compte des conditions)

**Propriétés :** 1) Tout fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont continue sur  $\mathbb{R}$

**Exemples :**

1)  $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$

$x^2 + x + 3$  Est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  de plus  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$  (Son discriminant  $\Delta$  est négatif)

2)  $g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$  est continue sur :

$] - \infty, -3[$  ; sur  $] - 3, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .

3) La fonction  $\tan$  est continue sur tous le intervalles de la forme :  $] -\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[$  (où  $k \in \mathbb{Z}$ )

## 3) Continuité de la composition de deux fonctions.

**Théorème :** Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  tels que  $f(I) \subset J$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

1) Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$  alors  $g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

2) Si  $f$  est continue  $I$  et  $g$  continue en  $f(I)$  alors  $g \circ f$  est continue  $I$ .

**Exemples :** 1) Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$$

Montrons que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Puisque les fonctions :  $f_1 : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$  et

$f_2 : x \rightarrow \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

Et  $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  alors :  $f = f_2 \circ f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g$  une fonction définie par

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}}$$

Montrons que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

On a :  $D_g = [0; +\infty[$  et Puisque la fonction :

$g_1 : x \rightarrow \frac{x}{1 + \sin^2 x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et

$g_2(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  et  $g_2 : x \rightarrow \sqrt{x}$  sont continue sur  $\mathbb{R}^+$

Donc :  $g = g_2 \circ g_1$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

3) Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1; \text{ si } \dots x < 0 \\ f(x) = 0; \text{ si } \dots x \geq 0 \end{cases} \text{ et } g(x) = 5$$

Montrons que  $f$  est n'est pas continue en  $x_0 = 0$

et  $h = g \circ f$  est continue en  $x_0 = 0$

En effet : on a  $f(0) = 0$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 = 1 \neq f(0)$$

Et  $g$  est continue en  $x_0 = 0$

mais on a :  $(g \circ f)(x) = 5$  est continue en  $x_0 = 0$



4)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  
 $x \rightarrow x^2+1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas  
sur  $\mathbb{R}$  donc :  $x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$   
et  $(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}\right)$  et  $\sin$  est continue sur  $\mathbb{R}$

### 3) Limite de *vous*

**Théorème :** Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $x_0$  telle  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$   
si  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

**Preuve :** On a :  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \in \mathbb{R}$  donc  $u$  admet

un prolongement par continuité  $u$  définie

$$\text{comme : } \begin{cases} u(x) = u(x); \text{ si } \dots x \neq x_0 \\ u(x_0) = l \end{cases}$$

La fonction  $u$  étant continue en  $x_0$ ; et  $v$  est continue en  $u(x_0) = l$  alors et d'après le théorème de la composition  $v \circ u$  est continue en  $x_0$  et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = (v \circ u)(x_0) = v(l)$$

**Exemples :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \pi\right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

**Solution :1)**

Soient :  $f : x \rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2} \pi$  et  $g : x \rightarrow \sin x$

Puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \pi = \frac{\pi}{2}$   $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$2) \text{ puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = \pi$$

Et la fonction :  $x \rightarrow \cos x$  continue en  $\pi$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos \pi = -1$$

**Exercice8 :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$$

$$\text{Solution :1) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$$

et Puisque :  $x \rightarrow \cos x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$$

et Puisque :  $x \rightarrow \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Donc continue en  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  donc :

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2}{1-\cos x} = 4$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = 2 : x \rightarrow \sqrt{x} \text{ est continue en } 4$$

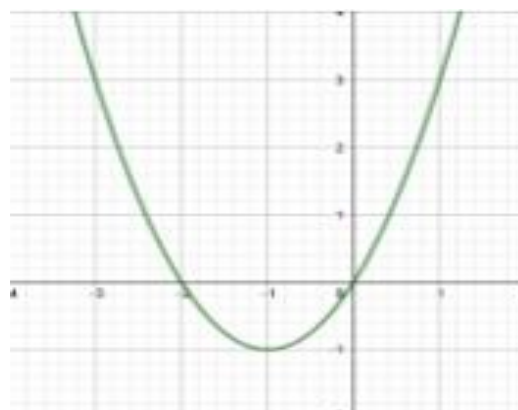
$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = \sin 2 \text{ car : } x \rightarrow \sin x \text{ est}$$

continue en 2

### IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

#### 1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

**Activité :** Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$

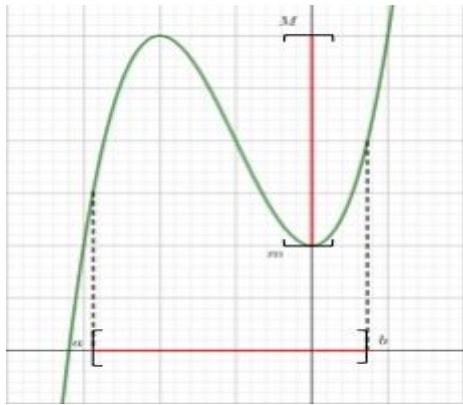


Déterminer graphiquement les images des intervalles :  $I_1 = [0,1]$  ,  $I_2 = [-3,-1]$  ;  $I_3 = [-3,1]$

**Théorème : (Admis)**

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est le segment  $[m, M]$  où :

$$m = \min_{x \in [a;b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a;b]} f(x)$$



**Cas particulier :**

- 1) Si  $f$  est continue croissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- 2) Si  $f$  est continue décroissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

**2) Image d'un intervalle.**

**2.1 Théorème général**

Théorème (admis) : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Exemples :**  $f(x) = x^2 + 2x$

Graphiquement en a : (le graphe ci-dessus)

$$f([-1,2]) = [-1,3] \text{ et } f([0,2]) = [-1,0]$$

$$f(]-1,0]) = [0,3[ \text{ et } f([2,+\infty[) = [0,+\infty[$$

$$f(]-\infty,1]) = [-1,+\infty[$$

**Remarque :** L'intervalle  $I$  et son image  $f(I)$  par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

**2.2 Cas d'une fonction strictement monotone**

1)  $f$  continue et strictement croissante sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(a);f(b)] \text{ et } f([a;b[) = \left[ f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right] \text{ et } f(]a;b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right]$$

2)  $f$  continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a;b]) = [f(b);f(a)] \text{ et } f([a;b[) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right] \text{ et } f(]a;b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right]$$

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

Déterminer les images des intervalles suivants :  $[0,1]$  ;  $[-2,-1[$  ;  $] -1, 1]$  ;  $[2, +\infty[$

**Solution :**  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 > 0 \text{ donc : } f \text{ continue et}$$

strictement croissante sur les intervalles  $] -\infty; -1[$

et  $] -1; +\infty[$  donc on a :  $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = \left[-3; \frac{-1}{2}\right]$

$$f([-2;-1[) = \left[ f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \right[ = [7; +\infty[$$

$$f(]-1;1]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x); f(1) \right] = \left] -\infty; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([2;+\infty[) = \left[ f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = \left[ \frac{1}{3}; 2 \right[$$

**V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE – TVI.**

**1) Cas général**

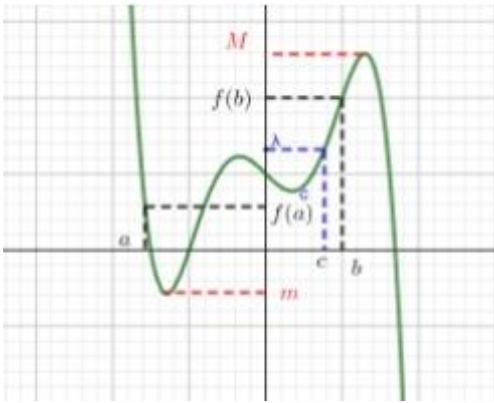
**Théorème T.V.I :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  .Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

**Preuve :**

Rappelons que :  $f(I) = J \Leftrightarrow (\forall x \in I)(f(x) \in J)$  et  $(\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y)$

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$





$a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que :  $a < b$ .

On sait que  $f([a, b]) = [m, M]$

où  $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$

On a donc  $f(a) \in [m, M]$  et  $f(b) \in [m, M]$ .

Soit  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  on a donc :

$\lambda \in [m, M]$  et puisque  $f([a, b]) = [m, M]$  donc  $\lambda$  admet au moins un antécédent  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$ . D'où pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

### 2) Cas $f$ strictement monotone.

#### Théorème T.V.I (cas $f$ strictement monotone)

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$



**Remarque :** L'expression " Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$  " peut-être formulée comme :  
" Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une solution unique dans  $[a, b]$

### 3) Corolaires

**Corolaire1 (T.V.I) :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

**Preuve :**  $f(a) \times f(b) < 0$  veut dire que :

$f(a)$  et  $f(b)$  ont des signes opposés donc 0 est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  On prend  $\lambda = 0$  dans le théorème général des valeurs intermédiaire.

#### Corolaire2 (T.V.I) :

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe un et un seul  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

### 4) Applications :

**Exemple1 :** Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants :  $]-1; -\frac{1}{2}[$  ;  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et  $]0; 1[$

**Solution :** on considère la fonction :  $g$  tel que

$$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

• On a :  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de  $\mathbb{R}$

○ Et on a :  $g(-1) = -\frac{3}{2}$  et  $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  donc :

$g(-\frac{1}{2}) \times g(-1) < 0$  donc : d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha_1 \in ]-1; -\frac{1}{2}[$  tel que :  $g(\alpha_1) = 0$

○ Et on a :  $g(0) = -\frac{1}{2}$  et  $g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  donc :

$g(-\frac{1}{2}) \times g(0) < 0$  donc : d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha_2 \in ]-\frac{1}{2}; 0[$  tel que :  $g(\alpha_2) = 0$

○ Et on a :  $g(0) = -\frac{1}{2}$  et  $g(1) = \frac{1}{2}$  donc :

$g(1) \times g(0) < 0$  donc : d'après le (T.V.I)

il existe  $\alpha_3 \in ]0; 1[$  tel que :  $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation :  $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$  admet 3 racines

différentes dans chacune des intervalles:

$]-1; -\frac{1}{2}[$  ;  $]-\frac{1}{2}; 0[$  et  $]0; 1[$

**Exemple2 :** Montrer que l'équation :  $x^3 + x + 1 = 0$

Admet une racine unique dans  $]-1; 0[$

**Solution :** on considère la fonction :  $f$  tel que

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

- On a : f est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur  $] -1; 0[$
- on a :  $f(-1) = -1$  et  $f(0) = 1$  donc :  
 $f(1) \times f(-1) < 0$
- $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  sur  $] -1; 0[$  donc f strictement croissante sur  $] -1; 0[$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $] -1; 0[$

**Exercice9** : Montrer que l'équation :  $\cos x = x$  Admet au moins une racine dans intervalle :  
 $I = [0; \pi]$

**Solution** :  $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose :  $f(x) = \cos x - x$

- On a : f est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur  $I = [0; \pi]$
- on a :  $f(\pi) = -1 - \pi < 0$  et  $f(0) = 1$  donc :  
 $f(0) \times f(\pi) < 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe  $\alpha \in ]0; \pi[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$

**Exercice10** : Montrer que l'équation :  $1 + \sin x = x$  Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

**Solution** :  $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$

On pose :  $f(x) = 1 + \sin x - x$

- On a : f est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur  $I = \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$
- on a :  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 - \pi}{2} > 0$  et

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3} - 4\pi}{6} < 0 \text{ donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Donc : d'après le **(T.V.I)**

il existe  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right[$  tel que :  $f(\alpha) = 0$

**Exercice11** : on considère la fonction : f tel que

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

- 1) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]0; 1[$
- 3) étudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution** :

1)a) On a : f est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est une fonction polynôme)

b)  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$  sur  $\mathbb{R}$  donc f strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

c) on a :  $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$   
 $= ]-\infty; +\infty[$  et on a :  $0 \in f(\mathbb{R})$

donc d'après le **(T.V.I)** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$

1) on a f est continue sur  $[0; 1]$  et  
 $f(0) \times f(1) < 0$  ( $f(0) = -1$  et  $f(1) = 1$ )  
et f strictement croissante sur  $[0; 1]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans  $\alpha \in ]0; 1[$

3) étudions le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

1cas : si  $x \leq \alpha$  alors  $f(x) \leq f(\alpha)$  (car f strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

Donc  $f(x) \leq 0$  (car  $f(\alpha) = 0$ )

2cas : si  $x \geq \alpha$  alors  $f(x) \geq f(\alpha)$  (car f strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

Donc  $f(x) \geq 0$  (car  $f(\alpha) = 0$ )

## VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

### 1) Le théorème

**Activité** : Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout y dans  $I = [0, +\infty[$ , l'équation  $f(y) = x$  admet une solution unique dans l'intervalle  $J = ]0; 1]$

2- Etudier la monotonie et la continuité de f sur  $\mathbb{R}$

On dit que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque de  $J = ]0, 1]$  vers  $I = [0, +\infty[$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

donc  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$

D'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de

$J = f(I)$  vers  $I$  et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

**2) Application :**

**Exemple 1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction  $g$  la restriction de  $f$  sur intervalle  $I = ]-2; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

**Solution : 1)**  $f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$1$

puisque  $g$  est strictement croissante et continue **sur :**  $I = ]-2; +\infty[$

donc  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur  $J = g(I) = g(]-2; +\infty[) = ]-\infty; 1[$

$$2) \begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in ]-2; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 2x + 3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{1-x} \text{ Donc } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$g^{-1} : ]-\infty; 1[ \rightarrow ]-2; +\infty[$$

Donc :  $x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$

**Exercice 12:** Soit  $f$  la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un  $J$  qu'il faut déterminer.

2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $J$

3) Représenter  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$

**Solution :** 1)  $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ = I$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ \quad f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$

$x$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$0$	$+\infty$

Donc :  $f$  est strictement croissante et continue

**sur :**  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ = I$

donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$

définie sur  $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\right) = [0; +\infty[$

$$2) \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

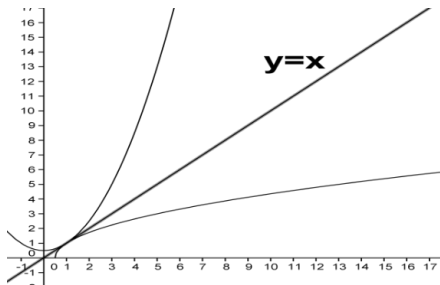
$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow 2y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

Donc  $f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

Donc :  $f^{-1} : [0; +\infty[ \rightarrow \left[ \frac{1}{2}; +\infty[ \right.$   
 $x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$

3)  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à  $(\Delta) y = x$



### 3) Propriété de la fonction réciproque

**Propriété 1 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  a la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

**Preuve :**

$$T_{f^{-1}} = \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$T_{f^{-1}} = \frac{1}{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{y_1 - y_2}}$$

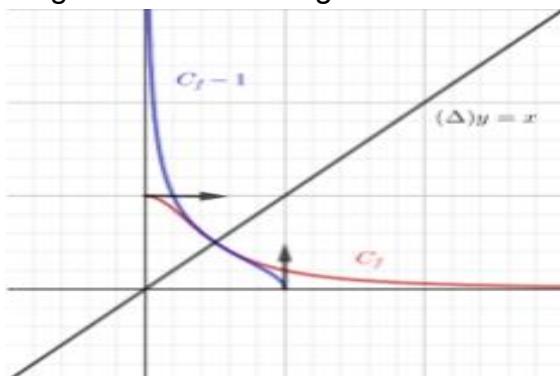
Donc le taux de  $f^{-1}$  sur  $J$  a le même signe que le taux de  $f$  sur  $I$

Et on conclut.

**Propriété 2 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à  $(\Delta) y = x$

**Remarque :**

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



### 4) La fonction racine n - éme

#### 4.1 Définition et règles de calculs

**Propriété et définition :**

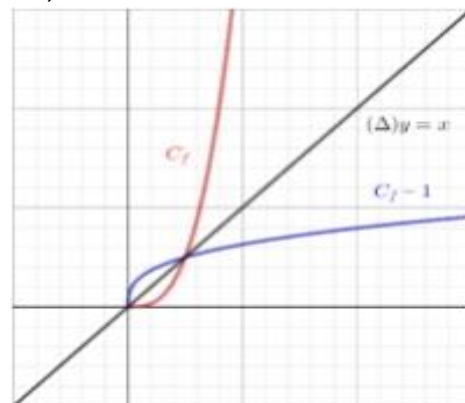
Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  ; la fonction :

$f : x \rightarrow x^n$  est une fonction continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  elle admet donc une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque  $f^{-1}$  s'appelle la fonction racine  $n$  - éme et se note  $\sqrt[n]{x}$

**Conséquence de la définition :**

- 1) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$
- 2)  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$
- 3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- 4) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  strictement croissante.
- 5)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- 6)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$
- 7)  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$
- 8)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- 9)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- 11) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- 12) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$  et  $l \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$
- 13) La courbe de la fonction  $\sqrt[n]{x}$



**Règle de calcul :**

- 1)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$
- 2)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^*+) \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$

4)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times p]{x^p}$

(à prouver)

**Remarque :**

1)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$

2)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[1]{x} = x$

**4.2 Résolution de l'équation  $x^n = a$**

**Exemples :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $x^5 = 32$    2)  $x^7 = -128$    3)  $x^4 = 3$    4)  $x^6 = -8$

**Solutions :** 1)  $x^5 = 32$  donc  $x > 0$

$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2$  donc :  $S = \{2\}$

2)  $x^7 = -128$  donc  $x < 0$

Donc :  $x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$

Donc :  $S = \{-2\}$

3)  $x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3}$  ou  $x = -\sqrt[4]{3}$

Donc :  $S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$

4)  $x^6 = -8$

On a  $x^6 \geq 0$  et  $-8 < 0$  donc  $S = \emptyset$

**Exercices d'applications :**

**Exercice13 :** simplifier les expressions

suivantes : 1)  $(\sqrt[3]{2})^3$    2)  $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

3)  $A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[3]{3}}$

4)  $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

5)  $C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$    6)  $D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$

7)  $E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}}$    8)  $F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$

**Solutions :** 1)  $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$    2)  $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$

3)  $A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^3} + \frac{\sqrt[5]{2^3 \times 3}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[5]{2^3}$

$A = 2 - 2 + \sqrt[5]{2^3} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$

3)  $B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[3]{2^{\frac{1}{4}}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

4)

$B = \frac{2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{2^{\frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{4}{15} + \frac{8}{15} + \frac{2}{3} + \frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23-8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2$

5)  $C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$

$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20-17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

6)  $D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times 2^{12}} =$

$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{(2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$

7)

$E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^{\frac{5}{2}}}} = \frac{10\sqrt{2^2} \times 10\sqrt{2^{15}}}{10\sqrt{2^7}}$

$= \frac{10\sqrt{2^{17}}}{10\sqrt{2^7}} = \sqrt{2^{10}} = 2$

8)  $F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \left(\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$F = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$

$F = 2^{2 + \frac{1}{3}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$

**Exercice14 :** comparer :  $\sqrt[5]{2}$  et  $\sqrt[7]{3}$

**Solutions :** on a :  $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243}$  et  $\sqrt[5]{2} = \sqrt[7 \times 5]{2^7} = \sqrt[35]{128}$

On a :  $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$  car  $243 > 128$

Donc :  $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

**Exercice 15 :** résoudre dans  $\mathbb{R}$  :

1)  $\sqrt[5]{3x-4} = 2$    2)  $(\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$

**Solutions : 1)**

$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3x-4})^5 = (2)^5 \Leftrightarrow 3x-4 = 32$

$\Leftrightarrow x = 12$  donc :  $S = \{12\}$



2)  $(\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$  on pose :  $\sqrt[5]{x} = X$

L'équation devient :  $X^2 - 5X + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$  et  $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

Donc :  $\sqrt[5]{x} = 3$  ou  $\sqrt[5]{x} = 2$

Donc :  $x = 243$  ou  $x = 32$

Donc :  $S = \{32; 243\}$

**Exercice 16** : calcules les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24}$       2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$       4)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$       6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{\sqrt{x-1}}$

**Solutions :**

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} = \sqrt[5]{2^3 + 24} = \sqrt[5]{8 + 24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)''$  FI

On a :  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \left(\frac{0}{0}\right)''$  FI

On a :  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)((\sqrt[3]{2x+6})^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2)} - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(\sqrt[3]{2x+6})^2 + 2 \times \sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12}$

6)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2 - 2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2 - 2)^2}} = 0$

Car :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2 - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

7)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$

Car :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+$

**Exercice 17** : simplifier les expressions

suivantes : 1)  $A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$

2) a) comparer :  $\sqrt[5]{4}$  et  $\sqrt[4]{3}$

b) comparer :  $\sqrt[3]{28}$  et  $\sqrt{13}$

c) comparer :  $\sqrt[5]{23}$  et  $\sqrt[15]{151}$

**Solutions : 1)**

$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^8}} \times \sqrt{2 \times 3^2}}$

$A = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$

2) a) comparaison de :  $\sqrt[5]{4}$  et  $\sqrt[4]{3}$

on a  $n \times m \sqrt{x^m} = n \sqrt{x}$

et on a :  $\sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243}$  et  $\sqrt[5]{4} = \sqrt[4 \times 5]{4^4} = \sqrt[20]{256}$

donc  $\sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3}$  car  $256 > 243$

b) comparaison de :  $\sqrt[3]{28}$  et  $\sqrt{13}$

on a  $\sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784}$  et

$\sqrt{13} = \sqrt[2]{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$

on a  $\sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784}$  car  $\sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$

b) comparaison de :  $\sqrt[15]{151}$  et  $\sqrt[5]{23}$



$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[5]{23^3} = \sqrt[5]{12167}$$

Donc :  $\sqrt[5]{23} > \sqrt[5]{151}$

### 4.3 L'expression conjuguai et ses applications

On sait que  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

et  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$  Il en résulte :

$$a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a+b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{**})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{**})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

#### Applications :

**Exercice18 :1)** Rendre le dénominateur rationnel

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

2) Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$

**Solutions :1)**

$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$  on utilise :  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$a = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{(\sqrt[3]{2}-2)(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^2} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{\sqrt[3]{2^3} - 2^3}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{-6} = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt[3]{2^3} + 2\sqrt[3]{2} + 2^2)}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times 1 + 1^2)}$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{2} - 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{5})^3} = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}}{3}$$

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$  on utilise :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1} - x)(\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} \times 1 + x^2} = 0$$

#### D'ordre 4 :

On sait que  $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Il en résulte :  $a-b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$

Par suite :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{**})$

$$\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :

$$a^4 + b^4$$

**Exercice19 :** Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2 + x - 3}$$

**Solutions :**  $\frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{\sqrt[4]{20x^2-4} - \sqrt[4]{16}}{2x^2 + x - 3}$

$$= \frac{20x^2 - 4 - 16}{(2x^2 + x - 3)(\sqrt[4]{(20x^2-4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2-4)^2} \times 4 + \sqrt[4]{(20x^2-4)16} + \sqrt[4]{16^3})}$$



1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $x^4 = 16$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $(x-1)^3 = -27$

### 5) Puissance rationnelle :

#### 5.1 Puissance entier

**Rappelle :** Soit  $x$  un réel et  $n$  un entier naturel

non nul on a :  $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$  et ( $x \neq 0$ )

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

#### 5.2 Puissance rationnelle

**Propriété :** Pour tout réel  $x \geq 0$  et pour tout entier

non nul  $q$  on pose :  $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

**Définition :**

Soit  $x$  un réel positif et  $r$  un rationnel ( $r \in \mathbb{Q}$ ) ;

$r = \frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

**Exemple :**  $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

$$2^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{4}}$$

#### Propriétés

Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs,  $r$  et  $r'$  des rationnels on a :

1. $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2. $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3. $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4. $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5. $(xy)^r = x^r y^r$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

**Exercice22 :** Considérons la fonction  $f$  définie

par :  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  ; si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de  $f$  sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et est ce  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  **Solution :** 1)  $x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$

donc :  $|x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$  donc :  $\left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$

donc :  $-|x| \leq f(x) \leq |x|$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

Donc :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

2) on a la fonction :  $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x}$  continue sur les

intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$  et les fonctions :

$f_2 : x \rightarrow \cos x$  et  $f_3 : x \rightarrow x$  sont continués sur les

intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$

Donc :  $f = f_3 \times (f_2 \circ f_1)$  est continue sur les

intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$

Et puisque :  $f$  est continue en  $x_0 = 0$

Alors  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $x \rightarrow \cos x$  est continue en  $x_0 = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \frac{1}{x} = +\infty$

**Exercice23 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  tels que  $f$  est bornée et  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$  ; Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$

**Solution :1)**  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  donc il existent deux réels  $m$  et  $M$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad m \leq f(x) \leq M$

Donc :  $f(x) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc :  $g(f(x)) \in g([m; M]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et puisque  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  alors

$g$  est continue sur  $[m; M]$  donc il existent deux

réels  $a$  et  $b$  tel que  $g([m; M]) = [a; b]$

donc  $g(f(x)) \in [a; b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $a \leq g(f(x)) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $a \leq (g \circ f)(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc  $g \circ f$  sont bornée sur  $\mathbb{R}$

2) la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc :

$g(\mathbb{R}) = I$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$

et puisque  $f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  Donc :

$f(y) \in [m; M] \quad \forall y \in I$

Donc :  $f(g(x)) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc :  $m \leq (f \circ g)(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc  $f \circ g$  sont bornée sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 24:** Considérons la fonction  $f$  continue

Sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  des

nombres de l'intervalle  $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$  admet au moins

une solution dans  $[a; b]$

**Solution :**

On considéré la fonction  $g$  définie sur  $[a; b]$  par

$g(x) = 3f(x) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

la fonction  $g$  est continue sur l'intervalle  $[a; b]$

soit  $f(\alpha)$  le plus petit des nombres  $f(x_1); f(x_2)$

;  $f(x_3)$  et soit  $f(\beta)$  le plus grand des nombres

$f(x_1); f(x_2)$  et  $f(x_3)$

On a :  $g(\alpha) = 3f(\alpha) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\alpha) = (f(\alpha) - f(x_1)) + (f(\alpha) - f(x_2)) + (f(\alpha) - f(x_3))$

Donc :  $g(\alpha) \leq 0$

De même : on a :  $g(\beta) = 3f(\beta) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\beta) = (f(\beta) - f(x_1)) + (f(\beta) - f(x_2)) + (f(\beta) - f(x_3))$

Donc :  $g(\beta) \geq 0$

et puisque  $g$  est continue sur  $[a; b]$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe un réel  $c$  dans

$[a; b]$  tel que :  $g(c) = 0$

Cad  $3f(c) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

Donc l'équation  $3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

admet au moins une solution dans  $[a; b]$

**Exercice 25 :** soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a; b]$  tels que :

$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Montrer que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

**Solution :** Montrons que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$  Cad :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; \lambda \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1$

On considéré la fonction  $h$  définie sur  $[a; b]$  par

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$  la fonction  $h$  est continue sur

l'intervalle  $[a; b]$  car  $f$  et  $g$  sont continues sur

l'intervalle  $[a; b]$  et  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$  Donc la

fonction  $h$  admet un minimum  $\lambda$  Cad il existe

$x_0 \in [a; b]$  tel que :

$\lambda = h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$  et  $\lambda \leq h(x) \quad \forall x \in [a; b]$

On a :  $0 < g(x_0) < f(x_0)$  donc  $0 < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$

donc :  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  donc :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

**Exercice 26:** Considérons la fonction  $f$  continue

Sur l'intervalle  $[a; b]$  tel que :  $f(a) < 0$

il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel que :  $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$

**Solution :**

On a :  $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0} \Leftrightarrow (b - x_0)f(x_0) - (a - x_0) = 0$

On considéré la fonction  $g$  définie par :

$g(x) = (b - x)f(x) - (a - x)$  ; la fonction  $g$  est

continue sur l'intervalle  $[a; b]$  car c'est la somme

de fonctions continues sur  $[a; b]$

On a :  $g(a) = (b - a)f(a) < 0$  car  $f(a) < 0$

Et  $b-a > 0$  et on a :  $g(b) = b-a > 0$

Donc : d'après le **(T.V.I)** il existe  $x_0 \in ]a; b[$  tel

$$\text{que : } g(x_0) = 0 \text{ cad } f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0}$$

**Exercice 27** : Soit la fonction  $f(x) = x^2 + x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Déterminer  $J = f([0,1])$

2- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[0,1]$  et déterminer  $f^{-1}(x) \forall x \in J$

**Exercice 28** : Soit la fonction  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

1- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  puis déterminer  $J = g([1, +\infty[$

2- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[1, +\infty[$  et déterminer  $g^{-1}(x) \forall x \in J$

**Exercice 29** : Soit la fonction  $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Montrer que  $h$  est une bijection de  $] - 1, 1[$  vers un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer  $h^{-1}(x) \forall x \in J$

**Exercice 30** :

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - x = 0$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$$

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*

